

# Matematický model věžového jeřábu

Tomáš Pelcl

Fakulta strojní, České vysoké učení technické v Praze  
Přístrojová a řídicí technika  
Praha, 2020

**Abstrakt**—Matematické modelování je mocný nástroj s širokým spektrem využitelnosti. Ačkoliv nalezneme využití v celé škále profesí, pro automatické řízení je zcela neodmyslitelnou součástí pro popisování systémů, predikce jejich chování a navrhování regulace. Tento článek popisuje postup návrhu matematického modelu pro věžový jeřáb, což je poměrně složitý a silně nelineární MIMO systém s pěti stupni volnosti. Důraz je kladen na vytvoření modelu způsobem, který následně umožní jeho efektivní využití a změny v postupu či parametrech budou aplikovatelné ihned bez nutnosti jakýchkoli dalších úprav. Model byl navržen s motivací jeho budoucího použití pro návrh vhodné řídicí metody, proto je popsán také postup pro získání linearizovaného modelu, který pro většinu regulačních metod vyžadován.

**Klíčová slova**- Věžový jeřáb, matematický model, nelineární model, stavový popis, MIMO systém, INTECO.

## I. MOTIVACE

Těžko bychom dnes hledali vědecký obor nebo výzkumnou činnost, ve kterých matematické modelování nenajde využití. Ať už se jedná o ekonomii, přírodní vědy nebo inženýrské disciplíny, matematický model dokáže být velmi silným nástrojem pro popis chování určitého systému, k simulování jeho vývoje nebo reakcí na různé podněty. V technických oborech se k sestavení takového modelu nejčastěji využívá fyzikální popis soustavy pomocí diferenciálních rovnic.

Hlavním předmětem této práce je představení postupu pro tvorbu matematického modelu pro složitý MIMO (z angl. *Multiple Output Multiple Input*) systém a předvedení na konkrétní soustavě - stavebním jeřábu.

## II. PŘEDSTAVENÍ SOUSTAVY

Práce byla realizována na laboratorním modelu věžového jeřábu od firmy INTECO. Jedná se o silně nelineární dynamický systém s pěti stupni volnosti, jehož zjednodušené schéma s fyzikálním popisem znázorňuje obrázek 2. V celé této práci je délka lana uvažována konstantní, i tak se jedná o silně nelineární systém se čtyřmi stupni volnosti.

## III. MATEMATICKÝ POPIS

K získání vlastních pohybových rovnic systému existuje celá řada metod. Její výběr by měl být přizpůsoben charakteru úlohy, kterou má řešit, jelikož na každou soustavu lze aplikovat metody více či méně vhodné. Při pohledu na stavební jeřáb je patrné, že se jedná o kombinaci rovinného a rotačního pohybu vozíku a prostorového kyvadla v podobě lana s břemenem. Z toho důvodu se jeví jako vhodná metoda použití Lagrangeova přístupu, kde je využito potenciální a kinetické energie  $T$  a  $V$  dílčích částí soustavy.



Obrázek 1: Laboratorní model věžového jeřábu od firmy INTECO [4]

$$T = \frac{1}{2}m_m v_m^2 + \frac{1}{2}m_T v_T^2 + \frac{1}{2}J\omega_{\text{magn}}^2 \quad (1)$$

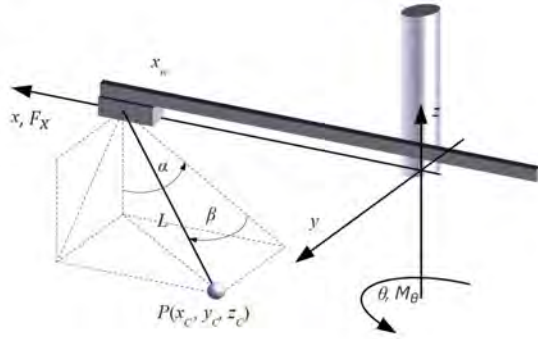
$$V = -m_m g L \cos(\beta) \cos(\alpha) \quad (2)$$

Z rovnice (1) je zřejmé, že je potřeba vyjádřit rychlost břemene  $v_m$  a rychlost vozíku  $v_T$ . Ty lze získat z příslušných zderivovaných polohových vektorů, které udávají polohu břemene a vozíku. Tyto vektory byly vyjádřeny za použití transformačních matic pohybu, jak je naznačeno rovnicemi (3) a (4). Matice  $R_x$  je matice rotačního pohybu kolem osy  $x$ , matice  $T_x$  značí rovinný pohyb ve směru  $x$  atd.

$$r_{1m} = R_z(\theta)T_x(x)R_y\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)R_z(\beta)T_x(L) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$r_{1T} = R_z(\theta)T_x(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Dalším krokem je výpočet tzv. Lagrangianu  $L_L$ , který představuje rozdíl kinetické a potenciální energie, tedy  $L_L = T - V$ .



Obrázek 2: Model soustavy se zakóvanými souřadnicemi a působícími silami

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L_L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial L_L}{\partial q_j} \right) = F_j, j = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$F_j = \begin{pmatrix} F_x - k_x \dot{x} \\ -k_\alpha \dot{\alpha} \\ -k_\beta \dot{\beta} \\ F_\theta - k_\theta \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Dalším krokem je již dosažení do Lagrangeových rovnic druhého druhu, které jsou popsány v rovnici (5). Je zde zaveden vektor proměnných  $q_j = (x \ \alpha \ \beta \ \theta)$ . Rovnicí (5) jsou popsány zobecněné síly, kde záporné členy reprezentují ztráty v příslušném směru. Dopočtem vyjdou čtyři vlastní pohybové rovnice soustavy. Protože vstupní veličiny jsou zatím vyjádřeny pouze jako síly  $F_j$ , musí být přepočteny na napětí  $U$ . Toho je docíleno použitím modelu DC motoru v kapitole IV.

Celý výpočet pohybových rovnic, tak jak je popsáno v této kapitole, byl od začátku proveden v programu Matlab pomocí symbolických proměnných (Symbolic Math Toolbox). Zvolený postup a matematický popis je přehledný a snadno pochopitelný, nicméně jeho výsledkem jsou velmi složité a dlouhé diferenciální rovnice. Tento postup byl upřednostněn kvůli možnosti odvození a hlubšího pochopení matematického popisu soustavy, který ve většině prací s touto problematikou chybí.

#### IV. MODEL DC MOTORŮ

Jeřáb INTECO je poháněn třemi DC motory. Jedná se o jediné akční členy soustavy a pohánějí rotaci výložníku ve směru  $\theta$ , pohyb kočky ve směru  $x$  a navíjení lana délky  $L$ . Délka lana je v této práci uvažována jako konstanta, tento akční člen je tedy zanedbáván.

$$F_x = \frac{\eta_x k_{gx} k_{m,x}}{R_{ax} r_x} G_{ax} U_x - \frac{\eta_x k_{gx}^2 k_{m,x}^2}{R_{ax} r_x^2} \dot{X}_w \quad (7)$$

$$F_\theta = \frac{\eta_\theta k_{g\theta} k_{m,\theta}}{R_{a\theta}} G_{a\theta} U_\theta - \frac{\eta_\theta k_{g\theta}^2 k_{m,\theta}^2}{R_{a\theta}} \dot{\theta} \quad (8)$$

Dynamické chování motorů pro směr  $x$  a  $\theta$  je popsáno rovnicemi (7) a (8), v tomto pořadí. Odvození těchto rovnic

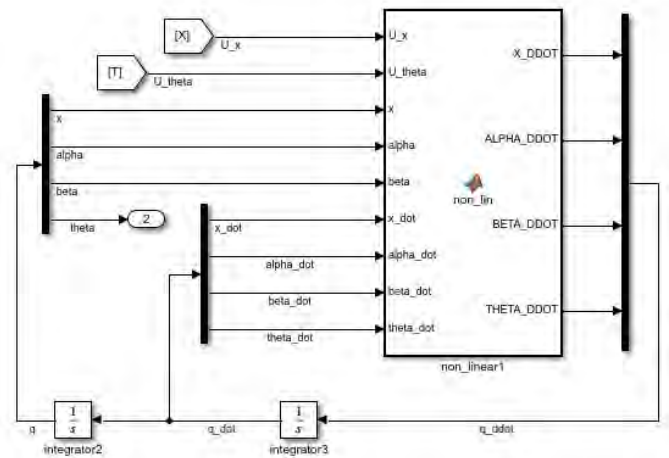
Popis	Parametr	Hodnota
hmotnost břemene	$m_m$	0,33 [kg]
hmotnost kočky	$m_T$	0,7 [kg]
moment hybnosti	$J$	2,4 [kgm <sup>2</sup> ]
délka lana	$L$	0,45 [m]
viskózní tření	$k_x$	14 [Ns/m]
viskózní tření	$k_\theta$	14 [Nms/rad]
viskózní tření ve směru $\beta$	$k_\alpha$	0,00005 [Nm/s]
viskózní tření ve směru $\alpha$	$k_\beta$	0,015 [Nm/s]
účinnost motoru a převodu	$\eta_x$	0,36
účinnost motoru a převodu	$\eta_\theta$	0,24
poloměr řemenice	$r_x$	0,0375 [m]
konst. momentu síly motoru	$k_{m,x}$	0,055 [Nm/A]
konst. momentu síly motoru	$k_{m,\theta}$	0,024 [Nm/A]
převodní poměr	$k_{gx}$	76
převodní poměr	$k_{g\theta}$	275
el. odpor rotoru	$R_{a,x}$	25 [ $\Omega$ ]
el. odpor rotoru	$R_{a,\theta}$	0,5 [ $\Omega$ ]
zesílení motoru	$G_{a,x}$	20,5
zesílení motoru	$G_{a,\theta}$	11

Tab. I: Parametry modelu - indexy  $x$  a  $\theta$  značí příslušnost k pohybu (motoru) v též směru

je naznačeno v práci [1]. Parametry modelu jsou společně s jejich hodnotami uvedeny v tabulce I. Hodnoty některých parametrů byly převzaty z práce [2], zbylé byly doměřeny, zjištěny experimentálně nebo odhadnuty.

#### V. NELINEÁRNÍ MODEL

Vlastních pohybové rovnice dále poslouží k sestavení samotného matematického modelu. Pro interaktivní použití a práci s modelem může být využito prostředí Matlab Simulink, kde ho lze poskládat z funkčních bloků. Vzhledem k silné nelinearitě modelu a složitosti rovnic je vhodné sestavit nelineární model pomocí programovatelného bloku namísto skládání z dílčích bloků, jak je zvykem u jednoduchých modelů. Pro tento účel byl použit blok Matlab function, který je možné vygenerovat tak, aby měl nastavené předem definované vstupy, výstupy a obsahoval celý matematický model. Nelineární model je zobrazen na obrázku 3.



Obrázek 3: Zapojení nelineárního modelu pomocí programovatelného bloku Matlab function - prostředí Simulink

Díky tomuto postupu je možné s modelem pracovat velice efektivně. Po změně parametrů, kinematického popisu soustavy nebo kterékoliv rovnice z výpočtu, je možné jedním spuštěním skriptu aktualizovat nelineární model bez nutnosti změn v Simulinku. To dovoluje rychle a přehledně ladit parametry modelu, testovat vliv (ne)zanedbnání libovolných vlivů apod.

Nelineární model byl vytvořen zejména pro ověření funkčnosti dynamického popisu soustavy. Z průběhu jednotlivých veličin v závislosti na čase můžeme porovnat, zda průběhy odpovídají představám o tom, jak by se měl model chovat. Dále je možné průběhy porovnat s chováním reálné soustavy, pokud je k dispozici.

## VI. STAVOVÝ POPIS SYSTÉMU

Pro stavový popis byly definovány následující stavové proměnné. Vektor  $\mathbf{u}(t)$  obsahuje vstupní proměnné, vektor  $\mathbf{y}(t)$  pak výstupní měřitelné proměnné systému.

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \alpha \\ \beta \\ \theta \\ \dot{x} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_x \\ U_\theta \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Jedním z hlavních požadavků na řízení jeřábu je eliminace kývání břemene a hodnoty úhlu  $\alpha$  a  $\beta$  tedy nabývají pouze malých hodnot. Získané diferenciální rovnice jsou velmi složité a pro další práci s nimi může být výhodné použít aproximaci goniometrických funkcí pro malé úhly podle obecného vzorce  $\sin(\gamma) \approx \gamma$  a  $\cos(\gamma) \approx 1$ , kde  $\gamma$  je malý úhel.[3] V případě této práce zmíněná úprava není nutná, protože všechny výpočty jsou provedeny programově a MATLAB disponuje dostatečně velkým výpočetním výkonem. I po aproximaci jsou rovnice příliš dlouhé na zobrazení v rámci tohoto článku.

Stavový popis systému je reprezentován dvěma základními rovnicemi (12) a (13)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \quad (13)$$

kde matice  $\mathbf{A}$  se nazývá matice systému,  $\mathbf{B}$  je matice řízení,  $\mathbf{C}$  matice vazeb výstupu na stav a  $\mathbf{D}$  matice vazeb vstupu na výstup, která má nulovou hodnotu a rozměry  $4 \times 2$ . Hodnoty matic pro tento systém jsou popsány (14) - (16). Matice (14) a (15) byly získány pomocí tzv. Jacobiho matice.

Ta je výsledkem parciálních derivací vlastních pohybových rovnic podle stavových proměnných za dosazení pracovního bodu. Maticí  $\mathbf{C}$  jsou definovány výstupy lineárního modelu a je možné jí modifikovat dle potřeby. V případě (16) jsou výstupními veličinami  $x$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\theta$ .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{231}{50} & 0 & 0 & -\frac{1378}{5} & -\frac{1}{5000} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3179}{100} & 0 & 0 & -\frac{15176}{25} & -\frac{1}{1000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1111}{50} & 0 & 0 & 0 & -\frac{23}{100} & \frac{283}{20} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{100} & -\frac{683}{50} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{4701}{100} & 0 \\ \frac{5177}{50} & 0 \\ 0 & -\frac{353}{25} \\ 0 & \frac{341}{25} \end{pmatrix} \quad (15)$$

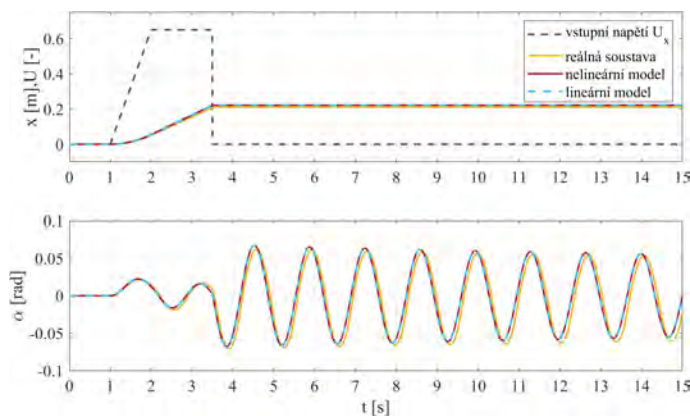
$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Stejně jako nelineární, i tento model byl sestaven tak, aby byl automaticky aktualizován po každé změně v odvození pohybových rovnic. K jeho vytvoření v prostředí Simulink lze použít několik variant, z nichž nejjednodušší je použití bloku *state-space*, do kterého jsou přímo dosazeny matice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  a počáteční podmínky.

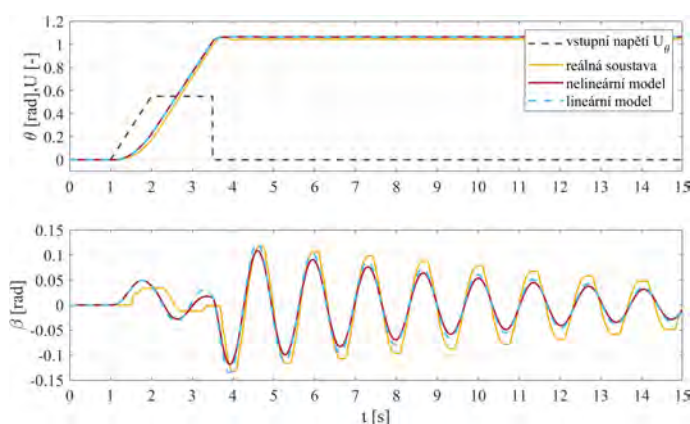
## VII. POROVNÁNÍ MODELŮ S REÁLNOU SOUSTAVOU

Porovnání nelineárního a lineárního modelu s naměřenými daty reálné soustavy je zobrazeno na obrázku 4 pro pohyb ve směru  $x$  a 5 pro pohyb ve směru  $\theta$ . Vynesené průběhy jsou odezvou na vstupní signál, který byl zvolen jako náběhová funkce se skokovou změnou, což je signál dostatečně složitý na správné ověření přesnosti modelů. Po prvním měření bylo provedení „fitování“ modelu - některé parametry modelu byly upraveny tak, aby jeho chování více odpovídalo realitě. Finální verze modelu je použita v tomto porovnání.

Z porovnání je zřejmé, že model funguje správně a chování kopíruje reálnou soustavu dostatečně přesně. Podle očekávání je pohyb ve směru  $x$  simulován mnohem přesněji, protože v něm nefigurují tak výrazně nelineární členy. Oproti tomu rotace ve směru  $\theta$  má nelinearitu výraznější, což se podepíše



Obrázek 4: Porovnání modelů s reálnou soustavou - pohyb ve směru  $x$  a příslušný úhel  $\alpha$



Obrázek 5: Porovnání modelů s reálnou soustavou - pohyb ve směru  $\theta$  a příslušný úhel  $\beta$

také na větší odchylce mezi nelineárním a linearizovaným modelem. I v případě pohybu ve směru  $\theta$  bude model pro návrh regulace účinný, protože u regulace harmonicky kmitajících pohybů záleží především na frekvenci kmitů, která je zde simulována s dobrou přesností.

### VIII. ZÁVĚR

Představený model byl úspěšně porovnán s reálnou soustavou a cíl práce byl tímto splněn. V návaznosti na tuto práci může být model použit na simulaci odezvy na různé vstupy, ale především umožňuje návrh vhodné regulace, což byla hlavní motivace k jeho vytvoření. Byly vytvořeny dvě varianty modelu, z nichž nelineární poslouží lépe k simulaci chování soustavy, naopak linearizovaný se hodí lépe právě k ladění a návrhu regulačních metod. Plánované řízení se bude týkat regulace polohy a eliminace kývání břemene. Příkladem plánovaných řídicích metod mohou být PID regulátor a tvarovače vstupního signálu (input shapery).

### REFERENCE

[1] Breuning, P (2015) Linear model predictive control of a 3D tower crane for educational use. PhD Thesis, University of Stuttgart, Stuttgart, Germany.

[2] Iles, S., Matusko, J., & Kolonic, F. (2014). Real-time Predictive Control of 3D tower crane. 2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE). doi:10.1109/isie.2014.6864615

[3] Win, T. M., Hesketh, T., & Eaton, R. (2016). Robotic Tower Crane Modeling and Control (RTCMC) with LQR-DRO and LQR-LEIC for Linear and Nonlinear Payload Swing Minimization. International Review of Automatic Control (IREACO). doi:10.15866/ireaco.v9i2.8431

[4] INTECO, Tower Crane User's Manual, 9.6 Edition. <http://www.inteco.com.pl/>

### Poděkování

Tato práce byla podpořena grantem Studentské grantové soutěže ČVUT č. SGS SGS20/159/OHK2/3T/12.



**Selected article from**

**Tento dokument byl publikován ve sborníku**

**Nové metody a postupy v oblasti přístrojové  
techniky, automatického řízení a informatiky 2021  
New Methods and Practices in the Instrumentation,  
Automatic Control and Informatics 2021  
15. 9. – 17. 9. 2021, Žatec**

**ISBN 978-80-01-06889-2**

Web page of the original document:

<http://iat.fs.cvut.cz/nmp/2021.pdf>

Obsah čísla/individual articles:

<http://iat.fs.cvut.cz/nmp/2021/>

Ústav přístrojové a řídicí techniky, FS ČVUT v Praze, Technická 4, Praha 6