

# MATHEMATICAL MODEL OF A HELICOPTER WITH SUSPENDED LOAD

*Matěj Čech (matej.cech@fs.cvut.cz)*

*Abstrakt: Práce se zabývá tvorbou modelu vrtulníku se zavěšeným břemenem, na kterém je možné zkoumat dynamické chování soustavy více těles. Cílem je úprava stávající konstrukce modelu vrtulníku pro lepší chování na delším lineárním vedení. Pro upravenou konstrukci pak vytvoření matematického modelu.*

*Klíčová slova: závěsné břemeno, vrtulník, matematický model*

*Abstract: This paper describes a creation of a model of helicopter with suspended load, on which is possible to study dynamic behaviour of multibody system. The goal is to adapt current model of a helicopter so it can be used with longer linear guide. The second goal is to create a mathematical model for this altered design.*

*Keywords: suspended load, helicopter, mathematical model*

## 1 Úvod

Manipulace se zavěšenými břemeny je náročná činnost, nejen z hlediska konstrukce manipulační techniky, ale hlavně z pohledu řízení. Při přesunu zavěšeného břemenem totiž dochází k jeho nežádoucímu rozkmitání, a proto je nutné, aby v cílové pozici byl v ustáleném stavu. Aby bylo možné simulovat chování takovéto soustavy, a následně navrhnou vhodné řízení, byl vytvořen laboratorní model vrtulníku se zavěšeným břemenem, na kterou navazuje tato práce.

## 2 Konstrukce

Model vrtulníku ve volném prostoru, který by umožňoval třídímenzionální pohyb, by byl velmi obtížně říditelný a pokusy zaměřené na tlumení kmitů břemene tak jen těžko realizovatelné. Proto byla zvolena stávající podoba soustavy, kdy je model vrtulníku umístěn na lineárním vedení. Tím pádem se vrtulník pohybuje jednodímenzionálně, v konstantní vzdálenosti od země a na omezené vzdálenosti, určené délkou vedení. Nedochozí tedy k nežádoucímu rozkmitání břemene do stran, rotaci vrtulníku vůči břemenu a podobně. Znamená to sice, že není brán ohled na to, jestli by vrtulník v prostoru udržel výšku, a že do dynamiky chování promlouvá nezanedbatelná hmotnost vozíku a baterie, nicméně to není pro tuto úlohu problém. Záměrem bylo vytvořit soustavu, na které je dobře simulovatelné vzájemné působení těles a která má malé třecí ztráty ve směru pohybu.

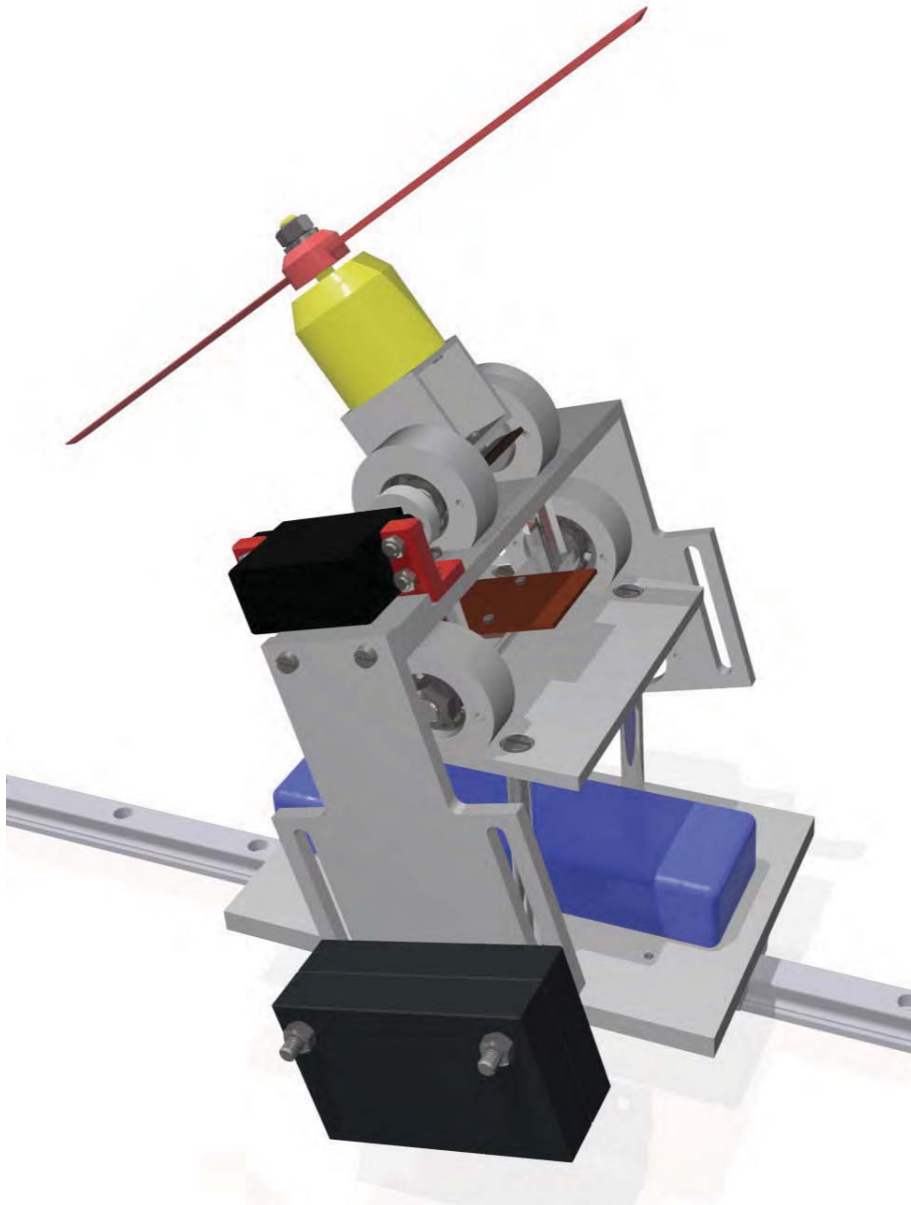
Hlavním nedostatkem původní podoby soustavy byla omezená délka lineárního vedení, na kterém se vozík s vrtulníkem pohyboval. Bylo proto rozhodnuto, že se zakoupí delší lineární vedení typu EGH 15 o délce 3 metry. K uchycení nových vozíků, typ EGH15CA, bylo nutné vytvořit jinou desku, na kterou bude uložena baterie a mikrokontroler STM32.

Vzhledem k šířce vedení bylo potřeba přesunout závěsné břemeno na protější stranu vozíku, než na které má být umístěno závaží střední části modelu, aby nevznikal příliš velký moment, který by mohl zvýšit tření vozíku a tak nežádoucí způsobem ovlivnit chování soustavy. Vnikl tedy nový díl pro uchycení servomotoru, který ovládá náklon motoru s vrtulí, a na který jsou uchyceny boční díly pro uchycení závaží střední části a zavěšeného břemene.

Při návrhu délky distančních sloupků bylo nutno brát v úvahu rozměry vrtule a úhly maximálního vychýlení v ložiscích tak, aby nemohlo dojít ke kontaktu mezi lineárním vedením a vrtulí. Rozsahy pohybu v ložiscích jsou vymezeny výměnitelnými destičkami.

Kompletního přepracování se dočkalo uložení servomotoru, který ovládá natočení vrchní části s motorem a vrtulí. Pro vytvoření držáku byla využita metoda 3D tisku a držák servomotoru lze snadno vyměnit za jiný, který by měl sloužit pro uchycení jiného typu servomotoru. V horní desce jsou proto vytvořeny dvě díry se závitem M3 k uchycení držáku.

Zmíněné úpravy konstrukce vyřešily všechny požadavky na fungování, takže po osazení mikroprocesorem a snímači vychýlení břemene a střední části bude celek připraven k testování.



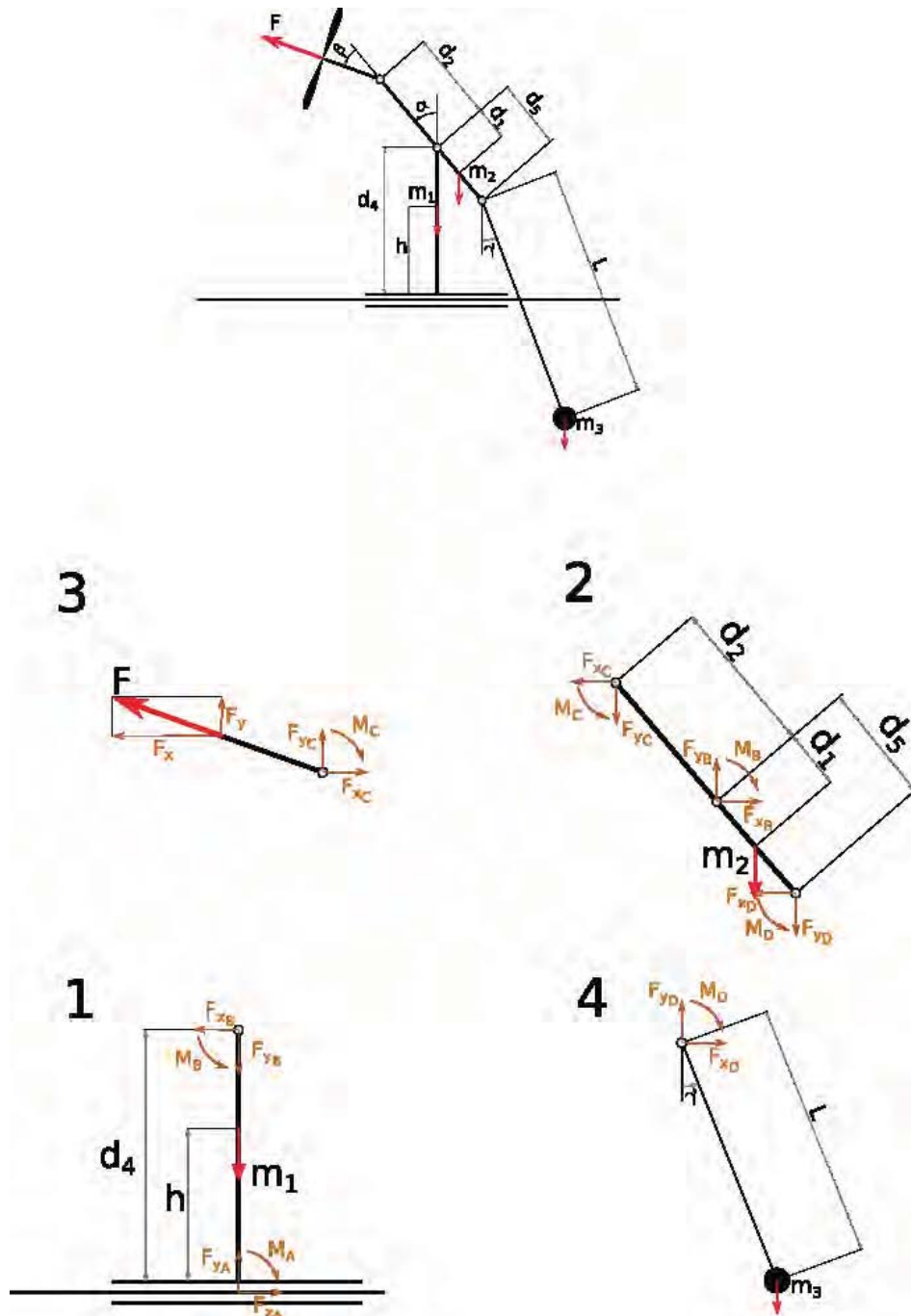
Obr. 1.: 3D model vrtulníku na lineárním vedení

### 3 Matematický model

Dynamika vrtulníku se zavěšeným břemenem je popsána soustavou diferenciálních rovnic v následujícím tvaru

$$M(x(t))\ddot{x}(t) + C(x(t))\dot{x}(t) + K(x(t))x(t) + Q(x(t)) = L(x(t))u(t) \quad (1)$$

Vektor  $x(t) = [x, \alpha, \gamma]^T$  určuje pozici vrtulníku souřadnicí  $x$ , úhel  $\alpha$  je sevřen mezi středním dílem a vertikální osou, úhel  $\gamma$  pak určuje vychýlení zavěšeného břemene vůči vertikální ose. Vektor  $u = [F, \beta]^T$  obsahuje veličiny sloužící k ovládní soustavy. Síla  $F$  reprezentuje tah vrtule, úhel  $\beta$  pak její natočení vůči střednímu dílu.



Obr. 2.: Silové působení těles

Po uvolnění jednotlivých těles byly získány rovnice popisující silové působení mezi tělesy.

Těleso 1:

$$\ddot{x}_1(t) \cdot m_1 + F_{x_B} + f_{ta} \cdot \dot{x}_1(t) = 0 \quad (2)$$

$$\ddot{y}_1(t) \cdot m_1 + F_{y_A} - F_{y_B} - m_1 \cdot g = 0 \quad (3)$$

$$M_A + F_{x_B} \cdot h + M_B = 0 \quad (4)$$

Těleso 2:

$$\ddot{x}_2(t) \cdot m_2 + F_{x_C} - F_{x_D} - F_{x_B} = 0 \quad (5)$$

$$-\ddot{y}_2(t) \cdot m_2 + F_{y_D} + F_{y_B} - F_{y_C} - m_2 \cdot g = 0 \quad (6)$$

$$I_2 \cdot \ddot{\alpha}(t) + F_{x_B} \cdot d_1 \cdot \cos(\alpha(t)) + F_{y_B} \cdot d_1 \cdot \sin(\alpha(t)) - F \cdot (d_1 + d_2) \cdot \sin(\beta(t)) - F_{x_D} \cdot (d_5 - d_1) \cdot \cos(\alpha(t)) - F_{y_D} \cdot (d_5 - d_1) \cdot \sin(\alpha(t)) + f_{tb} \cdot \dot{\alpha}(t) + f_{tb} \cdot (\ddot{\alpha}(t) - \dot{\gamma}(t)) = 0 \quad (7)$$

Těleso 3:

$$\ddot{x}_3 \cdot m_3 + F_{x_D} = 0 \quad (8)$$

$$\ddot{y}_3 \cdot m_3 + F_{y_D} + m_3 \cdot g = 0 \quad (9)$$

$$I_3 \cdot \ddot{\gamma}(t) - F_{x_D} \cdot l \cdot \cos(\gamma(t)) - F_{y_D} \cdot l \cdot \sin(\gamma(t)) - M_D = 0 \quad (10)$$

Matice koeficientů diferenciální rovnice pak vychází z výše uvedených vztahů. Pro další práci bylo nutné provést linearizaci. Podmínky pro její provedení byly stanoveny následovně

$$\mathbf{x}_0 = [0,0,0]^T \quad (11)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_0 = [0,0,0]^T \quad (12)$$

$$\ddot{\mathbf{x}}_0 = [0,0,0]^T \quad (13)$$

$$\mathbf{u}_0 = [1, 0]^T \quad (14)$$

Výsledná podoba matic, popisujících chování soustavy po linearizaci, má tuto podobu

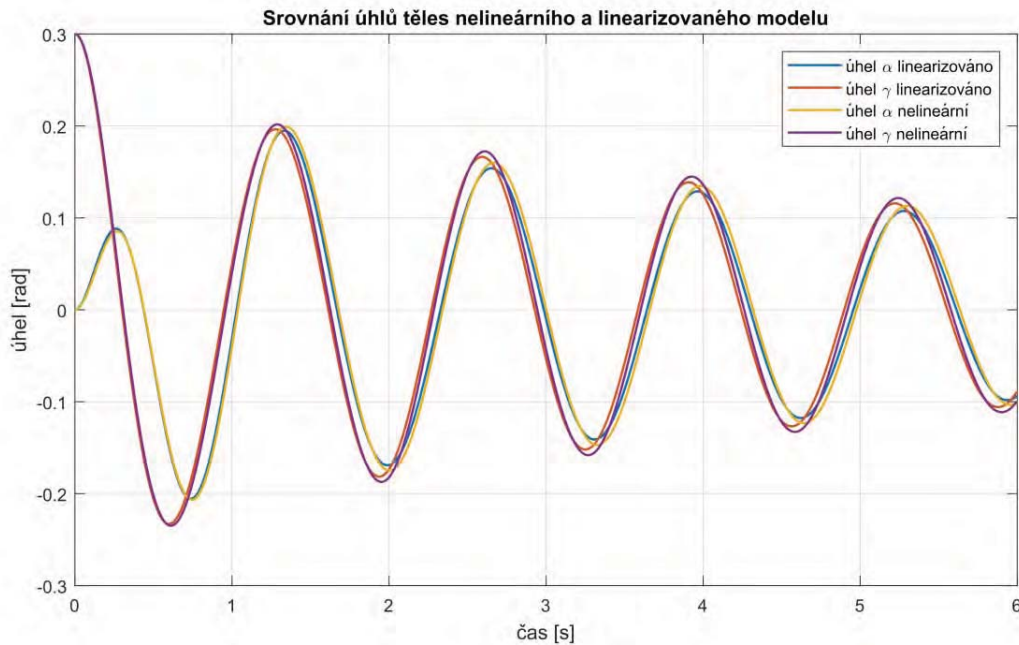
$$M_{lin} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 + m_3 & d_5 \cdot m_3 - d_1 \cdot m_2 & l \cdot m_3 \\ -d_1 \cdot m_1 - (d_1 - d_5) \cdot m_3 & I_2 - d_5 \cdot m_3 \cdot (d_1 - d_5) & -l \cdot m_3 \cdot (d_1 - d_5) \\ l \cdot m_3 & d_5 \cdot m_3 \cdot l & m_3 \cdot l^2 + I_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$C_{lin} = \begin{bmatrix} f_{ta} & 0 & 0 \\ -d_1 \cdot f_{ta} & f_{tb} + f_{td} & -f_{td} \\ 0 & -f_{td} & f_{td} \end{bmatrix} \quad (16)$$

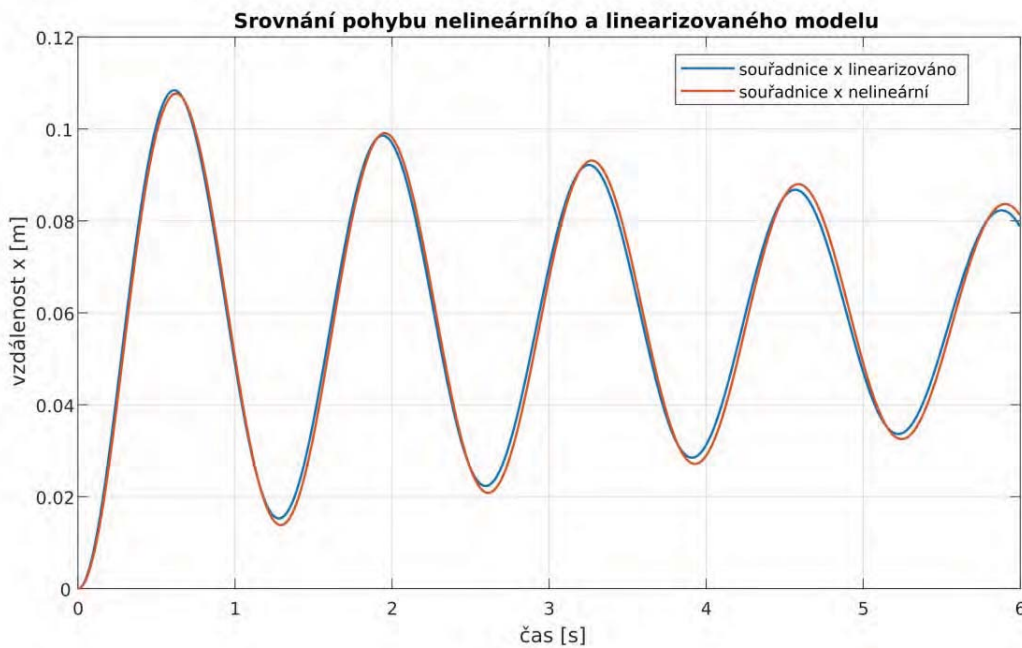
$$K_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & d_1 \cdot (g \cdot m_2 + g \cdot m_3 - 1) & 0 \\ 0 & 0 & g \cdot l \cdot m_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$L_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Simulace chování pomocí programu Matlab umožňuje přímo porovnat chování nelinearizovaného a linearizovaného modelu. Při pohledu na graf, který ilustruje odezvu soustavy na vychýlení na začátku simulace, respektive nastavení nenulových počátečních podmínek na intergrátorech, lze konstatovat, že odchylky vzniklé linearizací nejsou příliš výrazné.



Obr. 3.: Srovnání úhlů těles soustavy nelineárního a linearizovaného matematického modelu



Obr. 4.: Srovnání pohybu nelineárního a linearizovaného matematického modelu

#### 4 Závěr

Byly provedeny změny v konstrukci modelu vrtulníku se zavěšeným břemenem, které měly za cíl vyřešení požadavků na funkčnost soustavy za účelem testování tvarovačů signálu. Dále byla popsána tvorba matematického modelu této soustavy a ten byl následně porovnán s linearizovaným systémem. Ze srovnání vyplývá, že pro malé výchylky nedochází k větším rozdílům mezi linearizovanou a nelinearizovanou soustavou, viz Obr. 3. To, mimo jiné, nasvědčuje vhodně zvoleným parametrům pro provedení linearizace.

#### Literatura

- [1] J. J. Potter, C. J. Adams and W. Singhose, "A Planar Experimental Remote-Controlled Helicopter With a Suspended Load," in IEEE/ASME Transactions on Mechatronics, vol. 20, no. 5, pp. 2496-2503, Oct. 2015.
- [2] M. Hromčík and T. Vyhlídal, "Inverse Feedback Shapers for Coupled Multibody Systems," in IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 62, no. 9, pp. 4804-4810, Sept. 2017.



**Selected article from**  
**Tento dokument byl publikován ve sborníku**

**Nové metody a postupy v oblasti přístrojové techniky,  
automatického řízení a informatiky 2018**  
**New Methods and Practices in the Instrumentation,  
Automatic Control and Informatics 2018**  
**28. 5. – 30. 5. 2018, Příbram - Podlesí**

**ISBN 978-80-01-06477-1**

**Web page of the original document:**  
<http://control.fs.cvut.cz/nmp>  
<http://iat.fs.cvut.cz/nmp/2018.pdf>

**Obsah čísla/individual articles:**  
<http://iat.fs.cvut.cz/nmp/2018/>